

Funzioni differenziabili a valori in \mathbb{R}^n

APPLICAZIONI LINEARI

Definizione 1. Diciamo che una funzione $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è lineare se

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v),$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Ricordiamo che ogni funzione lineare $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è rappresentata da una matrice. Definiamo

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

e per ogni $j = 1, \dots, n$,

$$L(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Allora, per ogni vettore (colonna) $h \in \mathbb{R}^n$ con coordinate h_1, h_2, \dots, h_n , abbiamo

$$\begin{aligned} L(h) &= L(h_1 e_1 + h_2 e_2 + \dots + h_n e_n) \\ &= h_1 L(e_1) + h_2 L(e_2) + \dots + h_n L(e_n) = \begin{pmatrix} h_1 a_{11} + h_2 a_{12} + \dots + h_n a_{1n} \\ h_1 a_{21} + h_2 a_{22} + \dots + h_n a_{2n} \\ \vdots \\ h_1 a_{m1} + h_2 a_{m2} + \dots + h_n a_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi, la funzione lineare L è rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Precisamente, abbiamo che

$$L(h) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \quad \text{per ogni} \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Scriveremo quindi $L_A(h)$, oppure semplicemente Ah , al posto di $L(h)$.

Considerando i vettori riga della matrice A :

$$\begin{cases} A_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \\ A_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \\ \dots \\ A_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}). \end{cases}$$

Allora, possiamo anche scrivere $L_A(h)$ come

$$L_A(h) = \begin{pmatrix} A_1 \cdot h \\ A_2 \cdot h \\ \vdots \\ A_m \cdot h \end{pmatrix} \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{R}^n.$$

Ora, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, otteniamo

$$\begin{aligned} |L(h)| &= \left(\sum_{j=1}^m |A_j \cdot h|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^m |A_j|^2 |h|^2 \right)^{1/2} = \left(|h|^2 \sum_{j=1}^m |A_j|^2 \right)^{1/2} = |h| \left(\sum_{j=1}^m |A_j|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\left(\sum_{j=1}^m |A_j|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk}^2 \right)^{1/2}.$$

Definizione: Definiamo la norma della matrice A come

$$\|A\| = \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk}^2 \right)^{1/2}.$$

Proposizione 2. Per ogni applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, abbiamo la disuguaglianza

$$|L_A(h)| \leq \|A\| |h| \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{R}^n.$$

FUNZIONI DIFFERENZIABILI A VALORI IN \mathbb{R}^m

Definizione 3. Siano Ω un insieme aperto di \mathbb{R}^n e sia

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

una funzione a valori in \mathbb{R}^m . Diciamo che F è differenziabile nel punto $x \in \Omega$, se esiste una funzione lineare

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

tale che

$$F(x+h) = F(x) + L(h) + o(h),$$

ovvero tale che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|F(x+h) - F(x) - L(h)|}{|h|} = 0.$$

Proposizione 4 (Differenziabile \Rightarrow continua). Siano Ω un insieme aperto di \mathbb{R}^n e sia $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione. Se F è differenziabile in $x \in \Omega$, allora F è continua in x .

Dimostrazione: per esercizio.

Proposizione 5. Siano Ω un insieme aperto di \mathbb{R}^n e sia

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

una funzione a valori in \mathbb{R}^m . Allora F è differenziabile se e solo se tutte le funzioni F_1, F_2, \dots, F_m lo sono. Di conseguenza, abbiamo che se F è differenziabile nel punto $x \in \Omega$, allora è anche derivabile in quel punto (ovvero tutte le funzioni F_1, \dots, F_m lo sono) e

$$F(x+h) = F(x) + \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(x) & \dots & \partial_d F_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F_m(x) & \dots & \partial_d F_m(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_d \end{pmatrix} + o(|h|).$$

Dimostrazione: Sia A una matrice con m righe ed n colonne e con vettori riga A_1, \dots, A_m , dove

$$A_j \in \mathbb{R}^n \quad \text{per ogni} \quad j = 1, \dots, m.$$

Quindi il vettore

$$F(x+h) - F(x) - Ah \in \mathbb{R}^m$$

ha componenti

$$F_j(x+h) - F_j(x) - A_j \cdot h \quad \text{per} \quad j = 1, \dots, m,$$

e possiamo calcolare

$$\frac{|F(x+h) - F(x) - Ah|}{|h|} = \left[\sum_{j=1}^m \left(\frac{F_j(x+h) - F_j(x) - A_j \cdot h}{|h|} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Di conseguenza,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|F(x+h) - F(x) - Ah|}{|h|} = 0$$

se e solo se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|F_j(x+h) - F_j(x) - A_j \cdot h|}{|h|} = 0 \quad \text{per ogni} \quad j = 1, \dots, m.$$

Si ha quindi che F è differenziabile in x se e solo se le funzioni a valori reali F_1, \dots, F_m lo sono. Inoltre, i vettori riga A_j della matrice A sono i gradienti delle funzioni reali F_j :

$$A_j = \nabla F_j(x) = (\partial_1 F_j(x), \dots, \partial_n F_j(x)),$$

il che conclude la dimostrazione. □

Come immediata conseguenza otteniamo la seguente generalizzazione del teorema del differenziale.

Corollario 6 (Teorema del differenziale). Siano Ω un insieme aperto di \mathbb{R}^d e sia

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

una funzione derivabile in Ω . Se le derivate parziali

$$\partial_i F_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, d, \quad j = 1, \dots, m,$$

sono continue in x , allora F è differenziabile in x .

Corollario 7. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^d e siano

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m \quad e \quad G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

due funzioni differenziabili nel punto $X_0 \in \Omega$. Dimostrare che:

- (a) la somma $F + G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ è differenziabile in X_0 ;
- (b) il prodotto scalare $F \cdot G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in X_0 .

Teorema 8 (Composizione di funzioni differenziabili). Siano $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ due funzioni differenziabili rispettivamente in

$$X_0 \in \mathbb{R}^d \quad e \quad Y_0 := F(X_0) \in \mathbb{R}^n.$$

Allora, la funzione composta $G \circ F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ è differenziabile in X_0 e

$$\nabla(G \circ F)(X_0) = \nabla G(F(X_0))\nabla F(X_0)$$

che possiamo scrivere anche come

$$\begin{pmatrix} \partial_1(G \circ F)_1(X_0) & \dots & \partial_d(G \circ F)_1(X_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1(G \circ F)_m(X_0) & \dots & \partial_d(G \circ F)_m(X_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 G_1(Y_0) & \dots & \partial_n G_1(Y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 G_m(Y_0) & \dots & \partial_n G_m(Y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(X_0) & \dots & \partial_d F_1(X_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F_n(X_0) & \dots & \partial_d F_n(X_0) \end{pmatrix}.$$

oppure, ommettendo la dipendenza di X_0 ,

$$\begin{pmatrix} \partial_1(G \circ F)_1 & \dots & \partial_d(G \circ F)_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1(G \circ F)_m & \dots & \partial_d(G \circ F)_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 G_1 \circ F & \dots & \partial_n G_1 \circ F \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 G_m \circ F & \dots & \partial_n G_m \circ F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 F_1 & \dots & \partial_d F_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F_n & \dots & \partial_d F_n \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione: Siano

$$B = \begin{pmatrix} \partial_1 G_1(Y_0) & \dots & \partial_n G_1(Y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 G_m(Y_0) & \dots & \partial_n G_m(Y_0) \end{pmatrix} \quad e \quad A = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(X_0) & \dots & \partial_d F_1(X_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F_n(X_0) & \dots & \partial_d F_n(X_0) \end{pmatrix}.$$

Per ipotesi, esistono funzioni

$$\varepsilon_F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n \quad e \quad \varepsilon_G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

tali che

$$F(X_0 + X) = F(X_0) + AX + \varepsilon_F(X) \quad \text{dove} \quad \lim_{X \rightarrow 0} \frac{|\varepsilon_F(X)|}{|X|} = 0,$$

$$G(Y_0 + Y) = G(Y_0) + BY + \varepsilon_G(Y) \quad \text{dove} \quad \lim_{Y \rightarrow 0} \frac{|\varepsilon_G(Y)|}{|Y|} = 0.$$

Ora, calcoliamoi

$$\begin{aligned} G(F(X_0 + X)) &= G(F(X_0) + AX + \varepsilon_F(X)) \\ &= G(F(X_0)) + B(AX + \varepsilon_F(X)) + \varepsilon_G(AX + \varepsilon_F(X)) \\ &= G(F(X_0)) + BAX + B(\varepsilon_F(X)) + \varepsilon_G(AX + \varepsilon_F(X)). \end{aligned}$$

Quindi, basta dimostrare che

$$B(\varepsilon_F(X)) + \varepsilon_G(AX + \varepsilon_F(X)) = o(X).$$

Infatti, abbiamo che

$$\frac{|B(\varepsilon_F(X))|}{|X|} \leq \|B\| \frac{|\varepsilon_F(X)|}{|X|},$$

e dunque

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{|B(\varepsilon_F(X))|}{|X|} = 0.$$

D'altra parte,

$$\frac{|\varepsilon_G(AX + \varepsilon_F(X))|}{|X|} = \frac{|\varepsilon_G(AX + \varepsilon_F(X))|}{|AX + \varepsilon_F(X)|} \frac{|AX + \varepsilon_F(X)|}{|X|} \leq \frac{|\varepsilon_G(AX + \varepsilon_F(X))|}{|AX + \varepsilon_F(X)|} \left(\|A\| + \frac{|\varepsilon_F(X)|}{|X|} \right),$$

e quindi

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{|\varepsilon_G(AX + \varepsilon_F(X))|}{|X|} = 0. \quad \square$$

DIFFEOMORFISMI

Definizione 9. Siano U e V due insiemi aperti in \mathbb{R}^n . Diciamo che la funzione

$$\Phi : U \rightarrow V$$

è un **omeomorfismo** tra U e V , se:

- Φ è continua;
- $\Phi : U \rightarrow V$ è bigettiva ;
- la sua inversa $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$ è continua.

Proposizione 10. Siano U e V due sottoinsiemi aperti di \mathbb{R}^n e $\Phi : U \rightarrow V$ un omeomorfismo. Allora:

- (i) per ogni aperto $A \subset V$, l'insieme $\Phi^{-1}(A)$ è aperto.
- (ii) per ogni aperto $A \subset U$, l'insieme $\Phi(A)$ è aperto.
- (iii) per ogni compatto $K \subset V$, l'insieme $\Phi^{-1}(K)$ è compatto.
- (iv) per ogni compatto $K \subset U$, l'insieme $\Phi(K)$ è compatto.
- (v) per ogni chiuso $C \subset V$, l'insieme $\Phi^{-1}(C)$ è chiuso.
- (vi) per ogni chiuso $C \subset U$, l'insieme $\Phi(C)$ è chiuso.
- (vii) per ogni insieme Ω tale che $\bar{\Omega} \subset U$ abbiamo che $\Phi(\partial\Omega) = \partial(\Phi(\Omega))$.

Lemma 11. Sia Ω un insieme aperto di \mathbb{R}^n e $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua. Allora, per ogni insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^m$, anche l'insieme

$$\Phi^{-1}(A) = \{x \in \Omega : \Phi(x) \in A\} \subset \mathbb{R}^n$$

è aperto.

Esercizio 12. Siano U e V due insiemi aperti di \mathbb{R}^n e sia $\Phi : U \rightarrow V$ un omeomorfismo tra U e V . Mostrare che U è connesso per archi se e solo se V è connesso per archi.

Definizione 13. Siano U e V due insiemi aperti in \mathbb{R}^n . Diciamo che la funzione

$$\Phi : U \rightarrow V$$

è un **diffeomorfismo** di classe C^1 tra U e V , se:

- Φ è di classe C^1 su U (ovvero Φ è continua e differenziabile in ogni punto di U e le derivate parziali delle sue componenti sono funzioni continue);
- $\Phi : U \rightarrow V$ è bigettiva ;
- la sua inversa $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$ è di classe C^1 su V .

Proposizione 14. Siano U e V due aperti connessi di \mathbb{R}^n . Sia $\Phi : U \rightarrow V$ un diffeomorfismo. Allora,

$$\det J\Phi(x) \neq 0 \quad \text{per ogni } x \in U.$$

Inoltre, la funzione

$$\det J\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$$

ha segno costante su U .

Lemma 15. Siano A e B due matrici $n \times n$. Allora

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Dimostrazione: Dimostreremo il lemma per $n = 2$. Osserviamo che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bB & aC + bD \\ cA + dB & cC + dD \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} aA + bB & aC + bD \\ cA + dB & cC + dD \end{pmatrix} &= (aA + bB)(cC + dD) - (cA + dB)(aC + bD) \\ &= aAdD + bBcC - (cAbD + dBaC) \\ &= (ad - bc)(AD - BC) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

Dimostrazione della proposizione: Sia $\Psi : V \rightarrow U$ l'inversa di Φ . Siano $X_0 \in U$ e $Y_0 = \Phi(X_0) \in V$. Allora, abbiamo che

$$J\Psi(Y_0) J\Phi(X_0) = Id.$$

Di conseguenza,

$$\det(J\Psi(Y_0)) \det(J\Phi(X_0)) = \det(Id) = 1,$$

il che dimostra che $\det J\Phi \neq 0$ in U . Osserviamo che la funzione $\det J\Phi$ è ottenuta come somma e prodotto delle derivate parziali di Φ . Di conseguenza, essa è continua su U . Infine, siccome l'insieme U è connesso, abbiamo che $\det J\Phi$ non cambia segno in U . \square